

Практика 7. Снова повторение.

DM 59. Найти явный вид последовательности a_n такой, что $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 0$ и $a_1 = 2$.

DM 43. Сколько существует $2m$ -перестановок, состоящих только из циклов четной длины?

DM 44. Сколько чисел из $[1000]$ не являются ни точными квадратами, ни точными кубами?

DM 51. Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

(а) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;

(б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

DM 52. Докажите, что $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$, где $\gcd(a, b)$ — это наибольший общий делитель a и b .

DM 53.

(а) Пусть дано рекуррентное соотношение $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$. И последовательности $a_n = r_1^n$ и $a_n = r_2^n$ удовлетворяют этому соотношению ($r_1 \neq r_2$). Докажите, что любая последовательность удовлетворяющая этому соотношению представляется в виде: $b_1 \cdot r_1^n + b_2 \cdot r_2^n$.

(б) Пусть дано рекуррентное соотношение $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$, а r_1 и r_2 — решения уравнения $x^2 = c_1 \cdot x + c_2$. Докажите, что последовательности $a_n = r_1^n$ и $a_n = r_2^n$ удовлетворяют этому соотношению.