

Практика 6. Повторение.

DM 51. Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

- (а) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;
- (б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

DM 52. Докажите, что $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$, где $\gcd(a, b)$ — это наибольший общий делитель a и b .

DM 53.

- (а) Пусть дано рекуррентное соотношение $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$. И последовательности $a_n = r_1^n$ и $a_n = r_2^n$ удовлетворяют этому соотношению ($r_1 \neq r_2$). Докажите, что любая последовательность удовлетворяющая этому соотношению представляется в виде: $b_1 \cdot r_1^n + b_2 \cdot r_2^n$.
- (б) Пусть дано рекуррентное соотношение $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}$, а r_1 и r_2 — решения уравнения $x^2 = c_1 \cdot x + c_2$. Докажите, что последовательности $a_n = r_1^n$ и $a_n = r_2^n$ удовлетворяют этому соотношению.

DM 40. Сколько существует перестановок, имеющих ровно десять циклов, из которых три цикла имеют длину три, а семь — длину семь?

DM 41. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы на каждом спецкурсе был хотя бы один студент и при этом у каждого студента был бы хотя бы один спецкурс?

DM 42. Пусть $I(n, k)$ есть количество n -перестановок, имеющих ровно k инверсий. Докажите, что $I(n, k) = I(n, \binom{n}{2} - k)$.

DM 43. Сколько существует $2m$ -перестановок, состоящих только из циклов четной длины?

DM 44. Сколько чисел из $[1000]$ не являются ни точными квадратами, ни точными кубами?

DM 45. Посчитайте число пар непересекающихся хорд в правильном n -угольнике.