

**Домашнее задание 5. Методы линейной алгебры в комбинаторике и рекуррентные последовательности.**

Необходимо набрать 5 баллов

**DM 54.** (2 балла) Пусть  $F$  — набор подмножеств  $n$ -элементного множества, удовлетворяющий следующим свойствам:

1.  $\forall A \in F : |A| \equiv 1 \pmod{2}$ .
2.  $\forall A, B \in F : A \neq B \Rightarrow |A \cap B| \equiv 0 \pmod{2}$ .

Доказать, что  $|F| \leq n$ .

**DM 55.** (3 балла) В чёрном ящике лежит две битовых строки  $A$  и  $B$  длины  $r^2$ . Наша задача — установить, равны они или нет. Для этого можно выполнять запросы следующего вида. Для каждого  $i \in [r^2]$  мы решаем, хотим мы узнать  $i$ -й бит в строке  $A$  или в строке  $B$ . В ответ нам возвращается строка  $C$  длины  $r^2$ , в которой на  $i$ -й позиции стоит  $i$ -й бит одной из строк  $A$  и  $B$ , согласно нашему запросу.

После каждого запроса мы можем проанализировать полученную строку  $C$  и записать какую-то информацию в *неперезаписываемую* память. Затем мы можем перейти к новому запросу; при этом строка  $C$  исчезает и никакой информации о строках  $A$  и  $B$  кроме той, которая была ранее сохранена в неперезаписываемой памяти, мы в начале нового запроса не имеем.

Как проверить равенство строк  $A$  и  $B$ , используя  $r + 1$  запрос и  $r$  бит неперезаписываемой памяти?

**DM 56.** (1 балл) Сколько битовых строк длины  $n$  не содержат ни подстроки 000, ни подстроки 111?

**DM 57.** (1 балл) Докажите, что числа Фибоначчи  $F_n$  удовлетворяют следующему соотношению:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

**DM 58.** (2 балла) Докажите, что любое натуральное число  $N$  можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \dots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты  $a_i$  равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел  $\{a_i\}$  не равны одновременно единице.