

## Домашнее задание 7. Раскраски графов.

**DM 1.** (3 балла) Докажите, что для любого простого графа  $G$  на  $n$  вершинах выполнено следующее неравенство:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

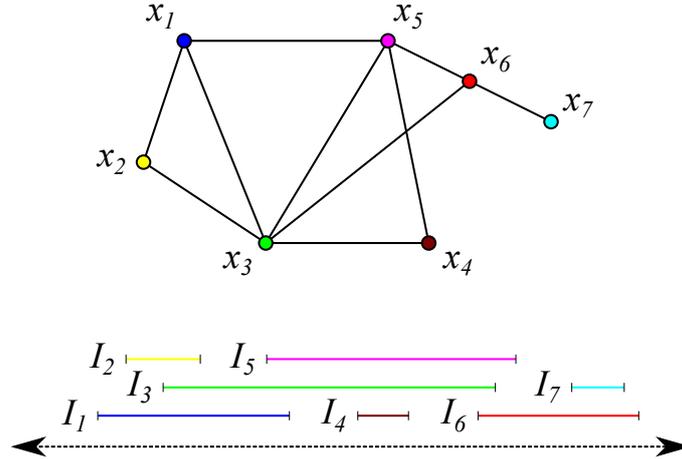


Рис. 1: Интервальный граф

**DM 2.** (2 балла) Пусть  $\omega(G)$  — кликовое число графа  $G$ , то есть количество вершин в его максимальном полном подграфе. Рассмотрим  $n$  замкнутых интервалов  $I_1, I_2, \dots, I_n$  на вещественной оси (рис. 1). Построим для этих интервалов граф на  $n$  вершинах  $x_1, \dots, x_n$ , соединяя вершины  $x_i$  и  $x_j$  ребром в том и только в том случае, когда  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Такой граф называется *интервальным* графом. Докажите, что каждый интервальный граф является совершенным (для любого подмножества вершин интервального графа, подграф  $H$ , индуцированный этим множеством вершин, обладает свойством  $\chi(H) = \omega(H)$ ).

**DM 3.** (3 балла) Пусть  $G_0 = K_2$ . Чтобы получить граф  $G_{k+1}$  из графа  $G_k$  применим следующую процедуру:

- множество вершин графа  $G_{k+1}$  составим из вершин  $V(G_k) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , вершин  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  и вершины  $z$ ;
- для каждого ребра  $\{x_i, x_j\} \in E(G_k)$  в граф  $G_{k+1}$  добавим два ребра:  $\{x_i, x_j\}$  и  $\{y_i, y_j\}$ ;
- для каждого  $i \in [n]$  добавим в граф  $G_{k+1}$  ребро  $\{z, y_i\}$ .

Докажите, что ни один из графов  $G_i$  не имеет треугольника в качестве подграфа (то есть  $\forall i : \omega(G_i) = 2$ ). Докажите также, что  $\chi(G_{k+1}) = \chi(G_k) + 1$ . Из этого будет следовать, что существуют графы со сколь угодно большим хроматическим числом, но без нетривиальных клик.