

Домашнее задание 4. Группа перестановок и разбиения числа в сумму слагаемых.

DM 1. (1 балл) Число Стирлинга 1-го рода без знака $c(n, k)$ — это количество перестановок из S_n , имеющих в точности k циклов. Доказать равенство:

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1) \cdot c(n - 1, k).$$

DM 2. (1 балл) Найдите рекуррентную формулу для числа перестановок, куб которых — тождественная перестановка.

DM 3. (2 балла) Какова вероятность того, что k заданных элементов принадлежат одному циклу в случайной перестановке на n элементах?

DM 4. (2 балла) Назовём матрицами перестановок матрицы, в которых на каждой строке и в каждом столбце стоит ровно по одной единице, причём все элементы кроме этих единиц — нули. Какое минимальное количество матриц перестановок нужно зафиксировать, чтобы перемножением этих матриц (взятых в любом количестве) можно было получить любую другую матрицу перестановки?

DM 5. (1 балл) Докажите, что разбиений числа n , в которых все слагаемые не превосходят k , столько же, сколько разбиений n на не более k не нулевых слагаемых.