Домашнее задание 3. Частичные порядки и графы.

$\boxed{\textbf{DM 1.}}$ (1 балл) В ящике 10 белых и 20 черных носков. Сколько минимум нужно вынуть носков, чтобы гарантировать, что вам удастся вынуть хотябы два одного цвета.

$\boxed{\textbf{DM 2.}}$ (1 балл) Найдите такое минимальное k, что если мы выберем k различных чисел из чисел от 1 до 20, то обязательно найдется пара дающая в сумме 21.

$\boxed{\textbf{DM 3.}}$ (1 балл) Пусть $\{A_i\}, i \in [k]$ — набор из k подмножеств множества $[n]$. Известно, что пересечение любых двух подмножеств из этого набора непусто. Докажите, что $k \leq 2^{n-1}$. Приведите пример, на котором в этом неравенстве достигается равенство.

$\boxed{\textbf{DM 4.}}$ (1 балл) Даны несколько различных натуральных чисел. Докажите, что если среди любых n из них можно выбрать два так, что одно делится на другое, то все числа можно покрасить в $n-1$ цвет так, чтобы из любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

$\boxed{\textbf{DM 5.}}$ (1 балл) Докажите, что любая последовательность из n^2+1 различных целых чисел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность из не менее чем $n+1$ числа.

$\boxed{\textbf{DM 6.}}$ (2 балла) Пусть на прямой задана произвольная система отрезков. Обозначим через M наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит одну из этих точек; через m — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из данной системы. Докажите, что $M = m$.