Домашнее задание 1. Биномиальные коэффициенты.

DM 1. (1 балл) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

DM 2. (1 балл) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова “метаматематика”?

DM 3. (2 балла) Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из символов ‘0’ и ‘1’) строк длины n, в которых ровно k единиц, при этом никакие две единицы не стоят рядом?

DM 4. (1 балл) Докажите *тождество Вандермонда*:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

DM 5. (1 балл) С помощью *формулы суммирования по верхнему индексу* $\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ выразите значение следующей суммы через полином от n:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

DM 6. (1 балл) Для натурального n, назовем n-разбиением числа k назовём упорядоченный набор неотрицательных целых чисел a_i, $1 \le i \le n$, для которого верно, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Например, $(3,0,1)$ и $(0,3,1)$ — два различных 3-разбиения числа 4. Подсчитайте количество n-разбиений числа k, удовлетворяющих ограничениям

$$a_i \ge s_i, \quad i = 1, \dots, n; \qquad\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \le k.$$

DM 7. (1 балл) Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10? Сколько можно построить треугольных пирамид, у которых все углы при одной из вершин прямые и длина каждого из рёбер при этой вершине является целым числом от 1 до 10? Многогранники считаются различными, если их нельзя совместить с помощью параллельного переноса или поворота.

DM 8. (2 балла) Сколькими способами можно выбрать два подмножества, A и B, n-элементного множества так, чтобы их пересечение было не пусто?

DM 9. (2 балла) Пусть $\widehat{S}(n,k)$ — число *сюръективных отображений*, то есть число функций f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y, таких что $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$. Найдите явные формулы для $\widehat{S}(n,3)$ и $\widehat{S}(n,n-2)$.

DM 10. (2 балла) Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{S}(n-i,k-1) \cdot k^i.$$

DM 11. (2 балла) Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n,k) = k \cdot \widehat{S}(n-1,k) + k \cdot \widehat{S}(n-1,k-1).$$

Эта формула вполне подходит для того, чтобы вычислять значения $\widehat{S}(n,k)$ рекурсивно. Но чтобы вычисление не шло вечно, для каких-то значений аргументов нужно сразу знать ответ и не применять рекуррентную формулу. Определите начальные условия: чему равно $\widehat{S}(n,0)$, $\widehat{S}(n,n)$ и, в частности, $\widehat{S}(0,0)$?