Листок 5. Опять схемная сложность.

В задачах 15-20 $C(f)$ обозначает минимальную глубину коммуникационного протокола, а $C_L(f)$ минимальное число листьев в дереве протокола.

COMP2 20. Пусть $M[X,X]$ — 0/1-матрица, которая содержит перестановочную матрицу размера $|X|$ (т.е. ее перманент над $\mathbb{R}$ не ноль).

(а) Докажите, что $\chi(M)\cdot T(M) \geq |X|^2$, где $T(M)$ — число единиц в матрице.

(б) Докажите при помощи этой техники, что $L(MOD_2)=\Omega(n^2)$.

COMP2 21. Пусть S_t — биномиальное распределение с t сбалансированными монетами. Докажите, что для любого $\delta<1$,

$$\sum_{i=0}^{t+\delta\sqrt{t}} |\Pr[S_t=i]-\Pr[S_{t+\delta\sqrt{t}}=i]| \leq 20\delta.$$

COMP2 22. Будем говорить, что коммуникационный протокол является протоколом с k раундами, если в этом протоколе количество "переходов хода" межу Алисой и Бобом равно k. Например, если сначала Алиса посылает что-то и после этого Боб знает ответ, то это однораундовый протокол. Обозначим сложность отношения R для протоколов с не более чем k раундами, как $C^{(k)}(R)$.

(а) Докажите, что для любой функции f верно, что $C^{(k)}(f) = O\left(\log\left(L^{(k)}(f)\right)\right)$, где $L(f)$ — число листьев формулы, которая вычисляет f в базисе $\{\wedge,\vee,\neg\}$ и эта формула глубины k (арность операций неограничена).

(б) Пусть $P\subseteq\{0,1\}^n\times\{0,1\}^n\times[n]$ — это такое отношение, что $(x,y,i)\in P$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \pmod 2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \equiv 1 \pmod 2$ и $x_i\neq y_i$. Докажите, что $C^{(k)}(f)=\Omega(n^{1/k})$.

(в) Пусть G — это связный граф степени d, а $c: V(G)\to\{0,1\}^n$. Будем называть цейтинской формулой $\mathrm{TS}_{G,c}$ конъюнкцию уравнений $\sum\limits_{u:(v,u)\in E(G)} x_{(u,v)} = c(v)$ для всех $v\in V$ записанную в КНФ.

Докажите, что $\mathrm{TS}_{G,c}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{v\in V(G)} c(v)=1$.

(г) Пусть G — это граф квадратная решетка на n^2 вершинах, а $c: V\to\{0,1\}$ — это такое отображение, что есть только одна вершина v с $c(v)=1$.

Докажите, что если $\mathrm{Search}_{\mathrm{TS}_{G,c}}$ — это такое отношение что Алисе дают значение переменных на нижнем треугольнике, а Бобу на верхнем и им надо найти клоз противоречия, то коммуникационная сложность этой задачи при ограничении, что раундов не больше чем k не меньше чем $\Omega(n^{1/k})$.

COMP2 23. Пусть $f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1})$, $\dots$, $f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы формулы, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L(f_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}) \oplus \dots \oplus f_m(x_{m1}, \dots, x_{mn_m})) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ — минимальное количество гейтов в формуле $\{\wedge, \vee, \neg\}$, вычисляющей f.

COMP2 24. Покажите, что у случайной булевой функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с большой вероятностью средняя сложность функции f не менее $2^{\frac{n}{10}}$ при больших n.

COMP2 25. Докажите, что если существует $S(n)$ псевдослучайный генератор, то существует такая функция $f \in E$, что $H_{wrs}(f|_{\{0,1\}^n}) \geq S(n)$.

COMP2 26. Докажите, что если перманент является полной задачей в классе $\sharp\mathbf{P}$ относительно сведений, сохраняющих число решений, то $\mathbf{NP} = \mathbf{RP}$.

COMP2 1. Рассмотрим функцию $\mathrm{Maj} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует:

(в) монотонная формула полиномиального размера, вычисляющая функцию Maj.

COMP2 11. Пусть $n = k^2$. Рассмотрим функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, заданную следующим образом: вход разделен на блоки по k битов, функция равно 1 тогда и только тогда, когда существует блок в котором два последовательных бита равны единице, а остальные биты равны нулю. Оцените $s(f), bs(f), C(f), D(f)$.

COMP2 12. Рассмотрим функцию $f = \bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i$. Докажите, что $R(f) = n$.

COMP2 14. Докажите, что если $\mathrm{SAT} \in \mathbf{PCP}(o(\log(n)), 1)$, то $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

COMP2 15. Докажите, что $C(f) = O(\log(C_L(f)))$.

COMP2 18. Игры Карчмера-Вигдерсона. Дана функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$, а Боб получает $y \in f^{-1}(1)$. Им требуется вычислить какую-нибудь координату i, что $x_i \neq y_i$. Данное отношение мы будем обозначать KW_f.

(а) Докажите, что $C(\mathrm{KW}_f) \leq d(f)$ и $C_L(\mathrm{KW}_f) \leq L(f)$, где $d(f)$ — минимальная глубина формулы, которая вычисляет f в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$, а $L(f)$ — соответственно число листьев.

COMP2 19. Будем называть алгоритм $S_{\epsilon,\delta}$ усредняющим булевым сэмплером, если он используя r случайных битов, генерирует q запросов длины n к функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и возвращает среднее арифметическое полученных значений так, чтобы результат отличался от $\bar{f}$ больше, чем на ϵ с вероятностью меньше, чем δ.

На основе сэмплера $S_{\epsilon,\delta}$ определим функцию $\mathrm{Ext} : \{0,1\}^r \times \{0,1\}^{\log(q)} \to \{0,1\}^n$ так, что $\mathrm{Ext}(x,i)$ равняется i-му запросу сэмплера, если он использует строку x вместо случайных битов.

(а) Докажите, что Ext является $(r - \log(\frac{\epsilon}{\delta}), 2\epsilon)$ экстрактором.

(б) Какой получится экстрактор, если воспользоваться сэмплером Рамануджана, у которого $r = n$ и $q = O(\frac{1}{\epsilon^2\delta})$?