Листок 7. Интерпретации.

$\boxed{\textbf{ML 35.}}$ Докажите, что:

(а) множество $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком изоморфно множеству $\mathbb{Q}_+$ (множество положительных рациональных чисел) со стандартным порядком (т. е. существует биекция, которая сохраняет порядок);

(б) счетное множество $\mathbb{M}$, на котором задан плотный порядок (т.е. между любыми двумя элементами есть еще один элемент) и в котором нет минимального и максимального элемента, изоморфно множеству $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком;

(в) любая замкнутая формула логики первого порядка истинна в интерпретации $(\mathbb{M}, <)$ (где $\mathbb{M}$ — счетное множество без минимального и максимального элемента, а порядок $<$ плотный) тогда и только тогда, когда она истинна в интерпретации $(\mathbb{Q}, <)$.

$\boxed{\textbf{ML 36.}}$ Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, =, <)$. (Две копии нат. чисел, все элементы из второй копии больше элементов из первой).

$\boxed{\textbf{ML 37.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(M, =)$, где M — призвольное бесконечное множество? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 38.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 39.}}$ Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

$\boxed{\textbf{ML 40.}}$ Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.

$\boxed{\textbf{ML 21.}}$ Докажите, что существует: счетное число не пересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить разрешимым.

$\boxed{\textbf{ML 23.}}$

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right]$, $\left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 33. Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное счисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t, при этом для каждого вхождения переменной x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y\ P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y, при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A, ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

ML 34. Для всех формул из задачи 32 покажите, что они выводимы в исчислении секвенций (формула ϕ выводима, если выводима $\vdash \phi$).