

Листок 3. Перечислимые и не перечислимые множества.

ML 11. Докажите, что для каждой вычислимой функции f найдется псевдообратная вычислимая функция g . А именно, g определена на множестве значений f , и для всех x из области определения f выполняется $f(g(f(x))) = f(x)$.

ML 12. Существует ли алгоритм, проверяющий, работает ли данная программа полиномиальное время? (т.е. на каждом входе алгоритм делает не более $p(|x|)$ шагов, где p — полином, а x — вход алгоритма).

ML 13. Приведите пример числа такого числа $r \in \mathbb{R}$, что множество $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq r\}$ не является перечислимым.

ML 14. Докажите, что множество всех рациональных чисел меньших π разрешимо.

ML 15. Пусть S — разрешимое множество натуральных чисел. Разложим все числа из S на простые множители, из данных простых составим множество D . Верно ли что D разрешимо?

ML 16. Докажите, что существуют перечислимые не пересекающиеся множества A, B , которые не могут быть отделены разрешимым множеством, т.е не существует такого разрешимого множества C , что $A \subseteq C$ и $B \cap C = \emptyset$.

ML 17. Опишите машины Тьюринга решающие следующие задачи (и докажете их корректность):

- (а) является ли строка палиндромом;
- (б) дана строка из 0 и 1, проверить, что число единиц в ней делится на 3;
- (в) дано число a в двоичной записи, вывести $a - 1$, если $a > 0$, а иначе вывести 0.

ML 18. Напишите программы с конечным числом переменных решающие следующие задачи:

- (а) даны числа a и b , нужно найти $a \cdot b$;
- (б) даны числа a и b , нужно найти a^b ;
- (в) даны числа a и b , нужно найти остаток и частное от деления a на b ;
- (г) дано число p , выяснить простое ли оно;
- (д) дано число n нужно найти n -ое простое число.

ML 9. Приведите пример множества, которое:

- (а) не является перечислимым;