Листок 10. Теория сложности.

$\boxed{\textbf{ML 52.}}$ Пусть языки $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$. Принадлежит ли объединение этих языков $\mathbf{NP}$? А пересечение?

$\boxed{\textbf{ML 53.}}$ Покажите, что язык выполнимых формул в 2-КНФ принадлежит классу $\mathbf{P}$.

$\boxed{\textbf{ML 54.}}$ Рассмотрим язык гамильтоновых графов. Пусть у вас есть алгоритм A, который разрешает данный язык за полиномиальное время. Предъявите алгоритм, который по графу выдает гамильтонов цикл за полиномиальное время.

$\boxed{\textbf{ML 55.}}$ Пусть функции $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ можно посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти (память считается только на рабочих лентах, входная лента доступна только для чтения, а по выходной ленте головка машины Тьюринга движется только слева направо). Докажите, что функцию $f(g(x))$ можно также посчитать с использованием $O(\log(n))$ памяти.

$\boxed{\textbf{ML 56.}}$ Докажите $\mathbf{NP}$-полноту следующего языка: язык выполнимых формул в КНФ, где каждый клоз либо хорновский, либо состоит из двух литералов.

$\boxed{\textbf{ML 57.}}$ Докажите $\mathbf{NP}$-полноту следующих задач:

(а) на вход подается пара графов (G_1, G_2), необходимо определить, изоморфен ли граф G_2 подграфу графа G_1 (подсказка для одного из решений, вершины графа G_1 кодируют подстановку для группы переменных из булевой формулы);

(б) на вход подается граф G и число $k \leq |G|$, необходимо определить, есть ли в графе G клика размера k;

(в) на вход подается граф G и число $k \leq |G|$, необходимо определить, существует такое ли $V \subseteq G$, что $|V| \leq k$ и все ребра графа G инцидентны хотя бы одной вершине из множества V.

$\boxed{\textbf{ML 58.}}$ Докажите, что:

(а) что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{n}$;

(б) язык простых чисел лежит в $\mathbf{NP}$.

$\boxed{\textbf{ML 21.}}$ Докажите, что существует: счетное число не пересекающихся перечислимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить разрешимым.

$\boxed{\textbf{ML 23.}}$

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right]$, $\left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 33. Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное счисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t, при этом для каждого вхождения переменной x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y\ P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y, при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A, ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

ML 40. Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.

ML 49. Будет ли теория $\mathrm{Th}((\mathbb{Z}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.

ML 50. Будет ли теория $\mathrm{Th}((\mathbb{N}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.