

Задание 13 (на 06.12, в письменном виде).

**ML 64.** Будем говорить, что замкнутая формула  $\phi$  семантически следует из теории  $T$ , если любая модель теории  $T$  является моделью формулы  $\phi$ , обозначение:  $T \models \phi$ . Покажите, что  $\phi$  семантически следует из  $T$  тогда и только тогда, когда  $\phi$  выводима из  $T$ . Коротко:  $T \models \phi \iff T \vdash \phi$ .

**ML 65.** Пусть теория  $T$  имеет модель со сколь угодно большим носителем. Докажите, что  $T$  имеет модель с бесконечным носителем.

**ML 66.** В алгебре вам доказывали, что если  $K$  — некоторое поле, а многочлен  $f \in K[x]$  неприводим, то существует  $K'$  надполем поля  $K$ , в котором многочлен  $f$  имеет корень (в качестве поля  $K'$  можно взять  $K[x]/\langle f \rangle$ , это кольцо является полем как фактор-кольцо по максимальному идеалу). С помощью теоремы о компактности покажите, что для всякого поля  $K$  существует его надполе  $K'$  такое, что каждый неконстантный многочлен с коэффициентами из  $K$  имеет корень в  $K'$ .

**ML 67.** С помощью теоремы о компактности докажите, что любой частичный порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка (т.е. до порядка, в котором любые два элемента сравнимы).

**ML 68.** Предъявите алгоритм, который по всякой формуле  $\phi$  сигнатуры  $\sigma$  выдаст  $\Sigma_2$ -формулу  $\psi$  сигнатуры  $\sigma$  с добавленными предикатными символами, что формула  $\phi$  общезначима тогда и только тогда, когда формула  $\psi$  общезначима.

---

**ML 59.** Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

- (а) всякая выполнимая формула, содержащая  $n$  предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более  $2^n$  элементов;
- (б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

**ML 63.** Постройте две неизоморфные интерпретации теории  $Th(\mathbb{Q}, <, =)$  (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.