Задание 9 (на 09.11).

ML 43. Докажите, что:

(а) множество $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком изоморфно множеству $\mathbb{Q}_+$ (множество положительных рациональных чисел) со стандартным порядком (т. е. существует биекция, которая сохраняет порядок);

(б) счетное множество M, на котором задан плотный порядок (т.е. между любыми двумя элементами есть еще один элемент) и в котором нет минимального и максимального элемента, изоморфно множеству $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком;

(в) любая замкнутая формула логики первого порядка истинна в интерпретации $(M, <)$ (где M — счетное множество без минимального и максимального элемента, а порядок $<$ плотный) тогда и только тогда, когда она истинна в интерпретации $(\mathbb{Q}, <)$;

ML 44. Покажите, что в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, <)$ предикат $y = x + 1$ невыразим при помощи бескванторной формулы.

ML 45. Выразим ли предикат $x = 0$ в интерпретации $(\mathbb{N}, =, <)$

(а) бескванторной формулой;

(б) любой формулой.

ML 46. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 47. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 38. Докажите, что существует такое множество $S \subseteq \mathbb{N}$, что для любого бесконечного перечислимого множества A множества $A \cap S$ и $A \setminus S$ имеют бесконечный размер.

ML 40. Покажите, что функция обратная к примитивно рекурсивной биекции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ может не быть примитивно рекурсивной.