Задание 7 (на 19.10).

ML 33. Покажите, что универсальный предикат для класса одноместных разрешимых предикатов не является разрешимым.

ML 34. Докажите, что следующие функции являются примитивно рекурсивными:

(а) x^y;

(б) $x!$;

(в) Покажите, что усеченное вычитание $x \dot{-} y$, которое равняется $x - y$, если $x \geq y$ и нулю иначе, является примитивно рекурсивным;

(г) $min(x, y)$;

(д) $max(x, y)$;

Множество $S \subseteq \mathcal{N}^k$ назавыается примитивно рекурсивным, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна.

ML 35.

(а) Покажите, что множество $S \subseteq \mathcal{N}^k$ примитивно рекурсивное, тогда и только тогда, когда оно есть множество нулей некоторой примитивно-рекурсивной функции;

(б) покажите, что объединение, пересечение и дополнение примитивно рекурсивных множеств является примитивно рекурсивным.

(в) покажите, что предикат $x = y$ примитивно рекурсивен;

(г) покажите, что предикат $x > y$ примитивно рекурсивен.

ML 36. Пусть отношение $R(x, y)$ задает примитивно рекурсивное множество (т.е. множество $\{(x, y) \mid R(x, y) = 1\}$), докажите, что отношения $S(x, z) = \exists(y \leq z)R(x, y)$ и $T(x, z) = \forall(y \leq z)R(x, y)$ также задают примитивно рекурсивные множества.

ML 37. Докажите, что существует такое подножество натуральных чисел, что его симметрическая разность с любым перечислимым множеством имеет бесконечный размер.

ML 21. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right]$, $\left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 27. Пусть $g(x_1, \ldots, x_k) = y_0$, где $y_0 = \min\{y \mid f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0\}$. Покажите, что при вычислимой не всюду определенной f, g может быть невычислимой.

ML 28. Пусть $H = \{(n, x) \mid <n>(x)$ останавливается$\}$. Покажите, что $H \in \Sigma_1$ и любое множество из Σ_1 m-сводится к H.

ML 29. Покажите, что множество номеров алгоритмов, которые не останавливаются ни на одном входе,

(а) лежит в классе Π_1;

(б) любое другое множество из Π_1 m-сводится к этому множеству;

(в) Покажите, что это множество не лежит в Σ_1.

ML 30. Является ли перечислимым множество всех программ, вычисляющим сюръективные функции? А его дополнение?

$\boxed{\textbf{ML 31.}}$ Обозначим через $K(x)$ минимальное такое число n, что алгоритм с номером n (номер алгоритма — это номер его текста, при этом строчки упорядочиваются сначала по длине, потом по алфавиту) на входе 0 входе печатает x и останавливается. Докажите, что $K(x)$ не является вычислимой функцией.

$\boxed{\textbf{ML 32.}}$ Пусть предикат $A(n, x)$ обладает таким свойством: для любого разрешимого предиката $R(x)$ найдется такое натуральное число r, что $A(r, x) = R(x)$ для всех x. Покажите, что предикат A не разрешим.