

### Задание 3 (на 21.09).

**ML 11.** Докажите, что множество всех рациональных чисел меньших  $\pi$  разрешимо.

**ML 12.** Пусть  $S$  — разрешимое множество натуральных чисел. Разложим все числа из  $S$  на простые множители, из данных простых составим множество  $D$ . Верно ли что  $D$  разрешимо?

**ML 13.** Докажите, что существуют перечислимые множества  $A, B$ , которые не могут быть отделены разрешимым множеством, т.е. не существует такого разрешимого множества  $C$ , что  $A \subseteq C$  и  $B \cap C = \emptyset$ .

**ML 14.** Покажите, что множество описаний машин Тьюринга, которые останавливаются на всех нечетных входах, является неперечислимым множеством и дополнение его тоже неперечислимо.

**ML 15.** Опишите машины Тьюринга решающие следующие задачи (и докажите их корректность):

- (а) является ли строка полиндромом;
- (б) дана строка из 0 и 1, проверить, что число единиц в ней делится на 3;
- (в) дано число  $a$  в двоичной записи, вывести  $a - 1$ , если  $a > 0$ , а иначе вывести 0.

**ML 16.** Напишите программы с конечным числом переменных решающие следующие задачи:

- (а) даны числа  $a$  и  $b$ , нужно найти  $a \cdot b$ ;
- (б) даны числа  $a$  и  $b$ , нужно найти  $a^b$ ;
- (в) даны числа  $a$  и  $b$ , нужно найти остаток и частное от деления  $a$  на  $b$ ;
- (г) дано число  $p$ , выяснить простое ли оно;
- (д) дано число  $n$  нужно найти  $n$ -ое простое число.

---

**ML 9.** Существует ли алгоритм, проверяющий, работает ли данная программа полиномиальное время? (т.е. на каждом входе алгоритм делает не более  $p(|x|)$  шагов, где  $p$  — полином, а  $x$  — вход алгоритма).