Задание 1. Перечислимые и не перечислимые множества.

$\boxed{\textbf{ML 1.}}$ Не ссылаясь на теорему Ферма, покажите, что множество всех показателей n, для которых существует решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых положительных числах, перечислимо. (Как теперь известно, это множество содержит лишь числа 1 и 2).

$\boxed{\textbf{ML 2.}}$ Диофантовым называется уравнение, имеющее вид $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что множество диофантовых уравнений, имеющих целые решения, перечислимо. (Оно неразрешимо: в этом состоит известный результат Ю. В. Матиясевича, явившийся решением знаменитой “10-й проблемы Гильберта”)

$\boxed{\textbf{ML 3.}}$

(а) Докажите, что объединение и пересечение перечислимых множеств перечислимо.

(б) Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

$\boxed{\textbf{ML 4.}}$ Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

$\boxed{\textbf{ML 5.}}$ Приведите пример неразрешимого подмножества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с $\mathbb{N} \times \{x\}$ и с $\{x\} \times \mathbb{N}$) разрешимы.

$\boxed{\textbf{ML 6.}}$ Приведите пример множества, которое

(а) не является перечислимым

(б) кроме того и его дополнение тоже не является перечислимым.

$\boxed{\textbf{ML 7.}}$ Докажите, что непустое множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно есть множество значений всюду определенной неубывающей вычислимой функции с натуральными аргументами и значениями.