

Листок 8. Мощности множеств.

DM-ML 50. Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

DM-ML 51.

- (а) Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.
- (б) Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

DM-ML 52. Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n - k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

DM-ML 53. Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрешается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

DM-ML 54.

- (а) Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.
- (б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DM-ML 55. В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остовного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него.

- (а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса.
- (б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.
- (в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

DM-ML 56. В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

DM-ML 57. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. До-

кажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 36. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» выразимым в арифметике.

DM-ML 47.

- (б) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DM-ML 49. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно \mathbb{R} .