

Листок 6. (Не)выразимость и комбинаторика.

В задаче 38 вам понадобится Бином Ньютона, который вы формально пройдёте на следующей паре.

DM-ML 36. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» выразимым в арифметике.

DM-ML 37. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathcal{N}, =, “x \text{ делит } y”)$.

DM-ML 38. Вычислите суммы

(а) $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$;
(б) $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k}$.

DM-ML 39. Найдите максимальное число среди $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

DM-ML 40.

- (а) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равна $\binom{n-1}{k-1}$.
(б) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$. Порядок слагаемых имеет значение.

DM-ML 41. Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

DM-ML 42. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n -угольнике.

DM-ML 43. Сколько существует способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

DM-ML 24. Докажите, что глубина дерева решений для функции $OR_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ не меньше n .

DM-ML 25. Докажите, что размер дерева решений для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{2n-1}x_{2n}$ не меньше, чем 2^n , но существует ветвящаяся программа для этой функции размера $O(n)$.

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

- (а) Докажите, что при суммировании двоичных чисел $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ и $\overline{b_n b_{n-1} \dots b_1}$ перенос в i -м разряде происходит тогда и только тогда, когда число $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ больше числа $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$, где $b'_k = 1 - b_k$ для всех k от 1 до n . Далее считаем, что $n = 2^m$.
- (б) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_j a_{j-1} \dots a_{j-2^k+1}}$ с $\overline{b'_j b'_{j-1} \dots b'_{j-2^k+1}}$ для всех $k \leq m$ и всех j , кратных 2^k (при этом $j \leq n$). Результат сравнения можно хранить в двух битах: 00, если первое число меньше, 11, если первое число больше и 10, если числа равны.
- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 29. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат S . Интерпретация: точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикаты:

- (а) A, B, C лежат на одной прямой;
 (б) A, B, C, D — суть вершины параллелограмма;
 (в) $|AB| = |CD|$;
 (г) $OA < OB$;
 (д) равенство треугольников;
 (е) равенство углов;
 (ж) свойство угла быть прямым.

DM-ML 30. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Как выразить предикат $y = x + 1$?

DM-ML 31. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$ на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат $xy = z$?

DM-ML 32. Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и предикат « x делит y ».

- (а) Как выразить предикат $x = 1$?
 (б) Как выразить предикат x — простое число?
 (в) Если добавить к этой сигнатуре константу 2, то как выразить предикат $\exists n x = 2^n$?

DM-ML 33. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двухместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?

DM-ML 34. Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре $\mathfrak{P} = \{=\}$, $\mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$, которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

DM-ML 35. На множестве \mathcal{N} задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.