Листок 3. Пропозициональные формулы - 2.

Определение 1 *Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство* $f(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. *Булева функция называется линейной, если она имеет вид* $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, *где* $a_i \in \{0, 1\}$.

Определение 2 *Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу* 1, *конъюнкцию* $\wedge$ *и сумму по модулю два* $\oplus$ *(приоритет* $\wedge$ *выше, чем* $\oplus$*). Мономом будем называть константу* 1 *и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида* $m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_k$, *где* m_i *— различные мономы,* $k \geq 0$. *Пример:* $x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.

DM-ML 17. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть не монотонная, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить

(а) отрицание, константу 1, константу 0;

(б) любую булеву функцию.

(в) Докажите, что если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DM-ML 18. Докажите, что у каждой невыполнимой формулы в КНФ, использующей n переменных, есть резолюционное опровержение, состоящие из не более, чем $2^{n+1} - 1$ дизъюнктов.

DM-ML 19. В каждую клетку квадрата $n \times n$ поставим свою пропозициональную переменную, затем для каждой клетки, в которой стоит переменная x запишем дизъюнкт $(\neg x \vee u(x) \vee r(x))$, где $u(x)$ — это переменная, которая находится в верхней соседней клетке для x, а $r(x)$ — это перемененная — правый сосед x (если верхнего соседа нет, то $u(x) = 0$, а если правого нет, то $r(x) = 0$). Пусть a — переменная, которая стоит в левой нижней клетке, допишем еще дизъюнкт (a). Покажите, что конъюнкция выписанных дизъюнктов — невыполнимая формула и для нее существует резолюционное опровержение длины $O(n^2)$.

DM-ML 20. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

$\boxed{\textbf{DM-ML 21.}}$ Формула в КНФ называется Хорновской, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли Хорновская формула.

$\boxed{\textbf{DM-ML 9.}}$ Приведите к КНФ и ДНФ следующие функции:

(а) $(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge z)$

(б) $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$

$\boxed{\textbf{DM-ML 10.}}$ Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$).

(а) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки $\vee$ и $\wedge$, то задаваемая ей булева функция монотонна.

(б) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 11.}}$ Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса $\downarrow$: результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера $\uparrow$: результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

$\boxed{\textbf{DM-ML 13.}}$

(а) Представьте в виде многочлена Жегалкина $\vee, \wedge$ и $\neg$;

(б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина.

(в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

$\boxed{\textbf{DM-ML 14.}}$ Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

$\boxed{\textbf{DM-ML 15.}}$ Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n.

$\boxed{\textbf{DM-ML 16.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.

$\boxed{\textbf{DM-ML 5.}}$

(б) Дано изображение плоского Эйлерова графа (степени всех вершин четны, ребра не пересекаются). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.}}$ В неориентированном графе $2n$ вершин нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2, причем оценка n^2 достигается.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.}}$ Дана однородна линейная система от n переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида $a_1x_1 + \dots a_nx_n = 0$), в которой меньше, чем n уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.}}$ Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.