Листок 12. Закон больших чисел.

$\boxed{\textbf{DM-ML 82.}}$ Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы

(а) Покажите, что для любых $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми.

(б) Покажите, что для любых функций $f_1, f_2, \dots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f_i(X_i)$ являются независимыми.

(в) Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми. Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n] \setminus I} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n] \setminus I})$ независимы.

$\boxed{\textbf{DM-ML 83.}}$ Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

$\boxed{\textbf{DM-ML 84.}}$ Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\Pr[X = 0] \le \frac{\mathrm{D}[x]}{\mathrm{E}[X]^2}$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 85.}}$

(а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $\mathrm{WH}(a)$, нетрудно понять, что длина строки $\mathrm{WH}(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $\mathrm{WH}(a)$ и $\mathrm{WH}(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

(б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathrm{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

$\boxed{\textbf{DM-ML 86.}}$ Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n + m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 27.}}$ Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \dots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DM-ML 28.}}$

(в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n.

(г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 70.}}$ Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

$\boxed{\textbf{DM-ML 73.}}$ Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.