

Листок 10. Вероятность.

DM-ML 67. В классе учатся n мальчиков и n девочек, каждому мальчику нравится несколько девочек из класса (возможно, что двум мальчикам нравится одна и та же девочка). Злая учительница рассадила детей за парты мальчик-девочка случайным образом (все варианты рассадки равновероятны). Чему равняется математическое ожидание числа мальчиков, которые сидят с нравившейся ему девочкой за одной партой?

DM-ML 68. Каждый из k человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равновероятно из оставшихся n этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

DM-ML 69. Покажите, что существует такая формула ϕ в 3-КНФ, в каждом дизъюнкте которой входят ровно три различных переменных, для которой не существует набора, который выполнит больше, чем $\frac{7}{8}m$ дизъюнктов, где m — это число дизъюнктов в ϕ .

DM-ML 70. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DM-ML 71.

- (а) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь.
- (б) Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл (простой цикл, проходящий по всем вершинам).

DM-ML 72. Докажите, что элементы множества $[n]$ можно покрасить в два цвета так, чтобы ни одна арифметическая прогрессия длины $\lceil 2 \log n \rceil$ не была покрашена в один цвет.

DM-ML 73. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n \frac{1 + \ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DM-ML 27. Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B . Покажите, что если из дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n семантически следует дизъюнкт C (это значит,

что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i , выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

DM-ML 28.

- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 36. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» выразимым в арифметике.

DM-ML 54.

- (б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DM-ML 65. Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k , то его вершины можно покрасить в $\lfloor k/2 \rfloor + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x).