Листок 9. Графы и вероятность..

$\boxed{\textbf{DM-ML 1.}}$ Докажите, что если $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то n команд могут так сыграть в волейбол, чтобы для любых k команд нашлась бы команда, которая выиграла бы у них всех.

$\boxed{\textbf{DM-ML 2.}}$ В школе в каждом кружке учится $n \geq 4$ человек, число кружков не превосходит $\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что можно всем школьникам выставить оценки по поведению (четыре оценки: от 2 до 5), что в каждом кружке будут представлены все 4 оценки.

$\boxed{\textbf{DM-ML 3.}}$ Пусть Ω — конечное пространство элементарных событий, P — вероятностная мера на Ω. Докажите формулу включений-исключений: Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ выполняется

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$

$\boxed{\textbf{DM-ML 4.}}$ Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство подмножеств $[n]$, что для любых двух $A, B \in \mathcal{F}$ выполняется $A \cap B \neq \emptyset$. Покажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 5.}}$ Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ называются независимыми, если $P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$. Приведите пример конечного вероятностного пространства и трех событий A, B, C, что любые два из них являются независимыми, но в совокупности они не являются независимыми.

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.}}$ Для двух строк $x, y \in \{0,1\}^n$ обозначим их скалярное произведение по модулю два: $<x, y> = \sum_{i=1}^n x_i y_i \bmod 2$. Чему равняется вероятность события $<x, y> = 1$, если строка y выбирается случайно (и все варианты равновероятны), а строка x фиксирована?

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.}}$ Докажите, что если вершины неориентированного графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $k+1$ цвет так, чтобы концы любого ребра были покрашены в разные цвета.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.}}$ Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $[k/2]+1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

$\boxed{\textbf{DM-ML 9.}}$ В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

$\boxed{\textbf{DM-ML 5.7.}}$ На множестве $\mathcal{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.5.}}$

(а) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равна $\binom{n-1}{k-1}$.

(б) Докажите, что число способов разбить число n ну сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$. Порядок слагаемых имеет значение.

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.6.}}$ Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k. В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.7.}}$ Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n-угольнике.

$\boxed{\textbf{DM-ML 6.8.}}$ Сколько существует способов разбить выпуклый n-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.1.}}$

(а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?

(б) Покажите, что число ломаных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.

(в) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана c_n.

(г) Покажите, что $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \ldots c_{n-1}c_0$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.2.}}$ Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.3.}}$ Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1, 2\}$ равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.4.}}$

(а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.

(б) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конечно или счетно.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.5.}}$ Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству точек на прямой.

$\boxed{\textbf{DM-ML 7.6.}}$ Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.1.}}$ Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.2.}}$

(а) Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

(б) Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.3.}}$ Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n - k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.4.}}$ Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрешается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

$\boxed{\textbf{DM-ML 8.5.}}$

(а) Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.

(б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DM-ML 8.6. В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остовного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него.

(а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса.

(б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.

(в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

DM-ML 8.7. В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

DM-ML 8.8. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.