

Листок 8. Графы..

DM-ML 1. Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

DM-ML 2.

- (а) Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.
- (б) Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

DM-ML 3. Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n - k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

DM-ML 4. Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрешается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

DM-ML 5.

- (а) Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.
- (б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

DM-ML 6. В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом остовного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него.

- (а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса.
- (б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса.
- (в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

DM-ML 7. В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

DM-ML 8. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

DM-ML 4.2.

- (в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$ для всех i от 1 до n .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух n -битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 4.3. Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n -битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

DM-ML 4.4. Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log n)$, то она вычисляется

и формулой полиномиального от числа переменных размера.

DM-ML 4.5. Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, которая зависит от всех n аргументов, имеет размер не меньше cn и глубину не меньше $c \log n$, где $c > 0$ — некоторая константа, которая зависит только от базиса схемы.

DM-ML 4.6. Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0, 1\}^{2k+1} \rightarrow \{0, 1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k + 1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

DM-ML 5.1. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат S . Интерпретация: точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикаты:

- (а) A, B, C лежат на одной прямой;
- (б) A, B, C, D — суть вершины параллелограмма;
- (в) $|AB| = |CD|$;
- (г) $OA < OB$;
- (д) равенство треугольников;
- (е) равенство углов;
- (ж) свойство угла быть прямым.

DM-ML 5.2. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Как выразить предикат $y = x + 1$?

DM-ML 5.3. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$ на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат $xy = z$?

DM-ML 5.4. Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и предикат « x делит y ».

- (а) Как выразить предикат $x = 1$?
- (б) Как выразить предикат x — простое число?
- (в) Если добавить к этой сигнатуре константу 2, то как выразить предикат $\exists n x = 2^n$?

DM-ML 5.5. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двухместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?

DM-ML 5.6. Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре $\mathfrak{F} = \{=\}, \mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$, которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

DM-ML 5.7. На множестве \mathcal{N} задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

DM-ML 6.1. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» является выразимым в арифметике.

DM-ML 6.2. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathcal{N}, =, \text{“}x \text{ делит } y\text{”})$.

DM-ML 6.3. Вычислите суммы

- (а) $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$;
- (б) $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k}$.

DM-ML 6.4. Найдите максимальное число среди $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.

DM-ML 6.5.

- (а) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равна $\binom{n-1}{k-1}$.
- (б) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$. Порядок слагаемых имеет значение.

DM-ML 6.6. Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

DM-ML 6.7. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n -угольнике.

DM-ML 6.8. Сколько существует способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

DM-ML 7.1.

- (а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$?
- (б) Покажите, что число ломаных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломаных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$.
- (в) Найдите число ломаных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана c_n .
- (г) Покажите, что $c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_0$.

DM-ML 7.2. Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

DM-ML 7.3. Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1, 2\}$ равномножно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $\{0, 1\}$.

DM-ML 7.4.

- (а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
- (б) Докажите, что множество точек строгого локального минимума любой функции из $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конечно или счетно.

DM-ML 7.5. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномножно множеству точек на прямой.

DM-ML 7.6. Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномножно \mathbb{R} .