

## Листок 7. Мощности множеств.

### DM-ML 1.

- (а) Сколько существует ломаных, идущих из точки  $(0, 0)$  в точку  $(2n, 0)$  шагами  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ ?
- (б) Покажите, что число ломаных, из  $(0, 0)$  в  $(2n, 0)$ , пересекающих прямую  $y = -1$ , равняется числу ломанных из  $(0, 0)$  в  $(2n, -2)$ .
- (в) Найдите число ломанных из  $(0, 0)$  в  $(2n, 0)$ , не опускающихся в нижнюю полу-плоскость. Это число называется числом Каталана  $c_n$ .
- (г) Покажите, что  $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$ .

**DM-ML 2.** Посчитайте количество способов соединения  $2n$  точек на окружности  $n$  непересекающимися хордами.

**DM-ML 3.** Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из цифр  $\{0, 1, 2\}$  равномощно множеству бесконечных последовательностей, состоящих из цифр  $\{0, 1\}$ .

### DM-ML 4.

- (а) Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счетно.
- (б) Докажите, что множество точек строго локального минимума любой функции из  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  конечно или счетно.

**DM-ML 5.** Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству точек на прямой.

**DM-ML 6.** Докажите, что если множество на плоскости содержит отрезок, то оно равномощно  $\mathbb{R}$ .

### DM-ML 4.2.

- (в) Постройте схему размера  $O(n)$  и глубины  $O(\log n)$ , которая вычислит результаты сравнений чисел  $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$  и  $\overline{b'_i b'_{i-1} \dots b'_1}$  для всех  $i$  от 1 до  $n$ .
- (г) Покажите, что существует схема для сложения двух  $n$ -битных чисел размера  $O(n)$  и глубины  $O(\log n)$ .

**DM-ML 4.3.** Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух  $n$ -битных чисел размера  $O(n^2)$  и глубины  $O(\log n)$ .

**DM-ML 4.4.** Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной  $O(\log n)$ , то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

**DM-ML 4.5.** Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , которая зависит от всех  $n$  аргументов, имеет размер не меньше  $cn$  и глубину не меньше  $c \log n$ , где  $c > 0$  — некоторая константа, которая зависит только от базиса схемы.

**DM-ML 4.6.** Функция голосования  $Major_{2k+1} : \{0, 1\}^{2k+1} \rightarrow \{0, 1\}$  равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы  $k + 1$  битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера  $O(k)$ .

**DM-ML 5.1.** Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат  $S$ . Интерпретация: точки на плоскости,  $S(X, Y, Z)$  означает, что  $|XZ| = |YZ|$ .

Выразите предикаты:

- (а)  $A, B, C$  лежат на одной прямой;
- (б)  $A, B, C, D$  — суть вершины параллелограмма;
- (в)  $|AB| = |CD|$ ;
- (г)  $OA < OB$ ;
- (д) равенство треугольников;
- (е) равенство углов;
- (ж) свойство угла быть прямым.

**DM-ML 5.2.** Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, <)$  на множестве целых чисел. Как выразить предикат  $y = x + 1$ ?

**DM-ML 5.3.** Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, +, y = x^2)$  на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат  $xy = z$ ?

**DM-ML 5.4.** Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и предикат « $x$  делит  $y$ ».

- (а) Как выразить предикат  $x = 1$ ?
- (б) Как выразить предикат  $x$  — простое число?
- (в) Если добавить к этой сигнатуре константу 2, то как выразить предикат  $\exists n x = 2^n$ ?

**DM-ML 5.5.** Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двухместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?

**DM-ML 5.6.** Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре  $\mathfrak{F} = \{=\}, \mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$ , которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

**DM-ML 5.7.** На множестве  $\mathcal{N}$  задайте формулу в сигнатуре  $(S, =)$ , которая выражает предикат  $x = y + N$ , где  $S$  — это функция прибавления 1,  $N$  — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть  $O(\log_2 N)$ .

**DM-ML 6.1.** Покажите, что предикат « $p$  —  $n$ -ое простое число» является выразимым в арифметике.

**DM-ML 6.2.** Покажите, что предикат  $x = 2$  невыразим в интерпретации  $(\mathcal{N}, =, \text{“}x \text{ делит } y\text{”})$ .

**DM-ML 6.3.** Вычислите суммы

- (а)  $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$ ;
- (б)  $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k}$ .

**DM-ML 6.4.** Найдите максимальное число среди  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ .

**DM-ML 6.5.**

- (а) Докажите, что число способов разбить число  $n$  на сумму  $k$  натуральных слагаемых равно  $\binom{n-1}{k-1}$ .
- (б) Докажите, что число способов разбить число  $n$  на сумму  $k$  целых неотрицательных слагаемых, равняется  $\binom{n+k-1}{k-1}$ . Порядок слагаемых имеет значение.

**DM-ML 6.6.** Докажите, что число способов разбить число  $n$  на не более, чем  $k$  различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число  $n$  на слагаемые, не превосходящие  $k$ . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

**DM-ML 6.7.** Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике.

**DM-ML 6.8.** Сколько существует способов разбить выпуклый  $n$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?