

## Листок 6. (Не)выразимость и комбинаторика.

**DM-ML 1.** Покажите, что предикат « $p$  —  $n$ -ое простое число» является невыразимым в арифметике.

**DM-ML 2.** Покажите, что предикат  $x = 2$  невыразим в интерпретации  $(\mathcal{N}, =, “x \text{ делит } y”)$ .

**DM-ML 3.** Вычислите суммы

(а)  $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$ ;  
(б)  $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k}$ .

**DM-ML 4.** Найдите максимальное число среди  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ .

**DM-ML 5.**

(а) Докажите, что число способов разбить число  $n$  на сумму  $k$  натуральных слагаемых равно  $\binom{n-1}{k-1}$ .

(б) Докажите, что число способов разбить число  $n$  на сумму  $k$  целых неотрицательных слагаемых, равняется  $\binom{n+k-1}{k-1}$ . Порядок слагаемых имеет значение.

**DM-ML 6.** Докажите, что число способов разбить число  $n$  на не более, чем  $k$  различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число  $n$  на слагаемые, не превосходящие  $k$ . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.

**DM-ML 7.** Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике.

**DM-ML 8.** Сколько существует способов разбить выпуклый  $n$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?

---

**DM-ML 4.2.**

(в) Постройте схему размера  $O(n)$  и глубины  $O(\log n)$ , которая вычислит результаты сравнений чисел  $\overline{a_i a_{i-1} \dots a_1}$  и  $\overline{b_i b'_{i-1} \dots b'_1}$  для всех  $i$  от 1 до  $n$ .

(г) Покажите, что существует схема для сложения двух  $n$ -битных чисел размера  $O(n)$  и глубины  $O(\log n)$ .

**DM-ML 4.3.** Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух  $n$ -битных чисел размера  $O(n^2)$  и глубины  $O(\log n)$ .

**DM-ML 4.4.** Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной  $O(\log n)$ , то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

**DM-ML 4.5.** Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , которая зависит от всех  $n$  аргументов, имеет размер не меньше  $cn$  и глубину не меньше  $c \log n$ , где  $c > 0$  — некоторая константа, которая зависит только от базиса схемы.

**DM-ML 4.6.** Функция голосования  $Maj_{2k+1} : \{0, 1\}^{2k+1} \rightarrow \{0, 1\}$  равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы  $k + 1$  битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера  $O(k)$ .

**DM-ML 5.1.** Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат  $S$ . Интерпретация: точки на плоскости,  $S(X, Y, Z)$  означает, что  $|XZ| = |YZ|$ . Выразите предикаты:

- (а)  $A, B, C$  лежат на одной прямой;
- (б)  $A, B, C, D$  — суть вершины параллелограмма;
- (в)  $|AB| = |CD|$ ;
- (г)  $OA < OB$ ;
- (д) равенство треугольников;
- (е) равенство углов;
- (ж) свойство угла быть прямым.

**DM-ML 5.2.** Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, <)$  на множестве целых чисел. Как выразить предикат  $y = x + 1$ ?

**DM-ML 5.3.** Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, +, y = x^2)$  на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат  $xy = z$ ?

**DM-ML 5.4.** Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и предикат « $x$  делит  $y$ ».

- (а) Как выразить предикат  $x = 1$ ?
- (б) Как выразить предикат  $x$  — простое число?
- (в) Если добавить к этой сигнатуре константу 2, то как выразить предикат  $\exists n x = 2^n$ ?

**DM-ML 5.5.** Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двухместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?

**DM-ML 5.6.** Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре  $\mathfrak{F} = \{=\}, \mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$ , которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

**DM-ML 5.7.** На множестве  $\mathcal{N}$  задайте формулу в сигнатуре  $(S, =)$ , которая выражает предикат  $x = y + N$ , где  $S$  — это функция прибавления 1,  $N$  — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть  $O(\log_2 N)$ .