Листок 3. Пропозициональные формулы - 2.

Определение Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0, 1\}$.

DM-ML 1. (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть не монотонная, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить

(а) отрицание, константу 1, константу 0;

(б) любую булеву функцию.

(в) Докажите, что если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

DM-ML 2. Докажите, что у каждой невыполнимой формулы в КНФ, использующей n переменных, есть резолюционное опровержение, состоящие из не более, чем $2^{n+1} - 1$ дизъюнктов.

DM-ML 3. В каждую клетку квадрата $n \times n$ поставим свою пропозициональную переменную, затем для каждой клетки, в которой стоит переменная x запишем дизъюнкт $(\neg x \vee u(x) \vee r(x))$, где $u(x)$ — это переменная, которая находится в верхней соседней клетке для x, а $r(x)$ — это перемененная — правый сосед x (если верхнего соседа нет, то $u(x) = 0$, а если правого нет, то $r(x) = 0$). Пусть a — переменная, которая стоит в левой нижней клетке, допишем еще дизъюнкт (a). Покажите, что конъюнкция выписанных дизъюнктов — невыполнимая формула и для нее существует резолюционное опровержение длины $O(n^2)$.

DM-ML 4. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

DM-ML 5. Формула в КНФ называется Хорновской, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли Хорновская формула.

DM-ML 6. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности (т.е. либо из x нет пути в $\neg x$, либо из $\neg x$ нет пути в x).

DM-ML 2.3. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса $\downarrow$: результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера $\uparrow$: результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

$\boxed{\textbf{DM-ML 2.5.}}$ Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

$\boxed{\textbf{DM-ML 2.6.}}$ Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n.

$\boxed{\textbf{DM-ML 2.7.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.