

Листок 2. Пропозициональные формулы.

DM-ML 1. Приведите к КНФ и ДНФ следующие функции:

(а) $(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge z)$

(б) $x_1 \oplus \dots \oplus x_n$

DM-ML 2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$).

(а) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки \vee и \wedge , то задаваемая ей булева функция монотонна.

(б) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \vee и \wedge .

DM-ML 3. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса \downarrow : результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера \uparrow : результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

Определение Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию \wedge и сумму по модулю два \oplus (приоритет \wedge выше, чем \oplus). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида $m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_k$, где m_i — различные мономы, $k \geq 0$. Пример: $x_1 x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.

DM-ML 4.

(а) Представьте в виде многочлена Жегалкина \vee , \wedge и \neg ;

(б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина.

(в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

DM-ML 5. Пусть формула $\phi \rightarrow \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ , которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \rightarrow \tau$ и $\tau \rightarrow \psi$ являются тавтологиями.

DM-ML 6. Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n .

DM-ML 7. Две формулы, содержащие только переменные и связки \vee , \wedge и \neg эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду \vee заменить на \wedge и наоборот.

DM-ML 1.6. В неориентированном графе $2n$ вершин нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2 , причем оценка n^2 достигается.

DM-ML 1.7. Дана однородная линейная система от n переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$), в которой меньше, чем n уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.

DM-ML 1.8. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.