Листок 14. Последний.

$\boxed{\textbf{DM-ML 1.}}$ В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

$\boxed{\textbf{DM-ML 2.}}$ Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ — конечное множество. Известно, что среди любых n из них можно выбрать два, что одно из них делится на другое. Докажите, что все числа множества S можно покрасить в $n-1$ цвет так, чтобы из любых двух чисел одного цвета, одно из них делилось бы на другое.

$\boxed{\textbf{DM-ML 3.}}$ На прямой отмечено произвольное множество отрезков. Пусть M — наименьшее количество точек на прямой, что каждый из отмеченных отрезков содержит хотя бы одну из этих точек; а m — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из отмеченных отрезков. Докажите, что $M = m$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 4.}}$ В комнате находятся n мудрецов. На каждом мудреце находится колпак черного или белого цвета. Колпак выдаются случайным образом независимо друг от друга. Каждый мудрец может видеть колпак всех остальных мудрецов, но не может видеть свою. Каждого мудреца спрашивают, не хочет ли он попробовать угадать цвет своей шляпы. Мудрец может попробовать или отказаться. Каждый мудрец делает выбор, не зная ответы остальных людей. Выигрывают или проигрывают мудрецы вместе. Они выигрывают, если все, кто решил отвечать отвечают верно, и хотя бы один мудрец отвечает. Во всех других случаях люди проигрывают. Стратегия в игре — это набор функций для каждого мудреца, по которым они решают, что отвечать в зависимости по цветам колпаков остальных игроков.

(а) Назовем граф G ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба, если его вершины соответствуют бинарным строкам длины n и если существует ребро $u \to v$, то строки u, v различаются не более, чем в одном бите. Пусть $K(G)$ — количество вершин в графе G со входящей степенью не менее 1 и исходящей 0. Покажите, что максимальная вероятность победы в игре (по всем стратегиям) равна максимуму по выборам подграфа n-мерного гиперкуба величины $K(G)/2^n$.

(б) Используя факт, что исходящая степень вершин не превосходит n, покажите, что $K(G)/2^n \leq \frac{n}{n+1}$ для любого графа G подграфа n-мерного гиперкуба.

(в) Покажите, что если $n = 2^l - 1$, то существует граф G, для которого $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. (Подсказка: используйте коды Хемминга).

$\boxed{\textbf{DM-ML 5.}}$ Докажите, что среди любых

(а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(б) Покажите, что из 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(в) Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

$\boxed{\textbf{DM-ML 10.7.}}$ Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$

Подсказка: Рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DM-ML 11.2. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

Подсказка: В первом пункте поймите, что запуск алгоритма много раз помогает. Во втором пункте с помощью вероятностного метода и пункта 1 доказать, что найдется такая строка случайных битов, с которой схема будет верно вычислять функцию f на всех входах.

DM-ML 12.4. Дан квадрат $n \times n$, в клетках которого стоят вещественные числа. Докажите, что либо можно подобрать такие n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (хотя бы одно из них не нулевое), что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на α_1, второго числа, умноженного на α_2,..., n-го числа, умноженного на α_n неотрицательна, либо можно подобрать такие n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ (хотя бы одно из них не нулевое), что в каждой строке сумма первого числа умноженного на β_1, второго числа, умноженного на β_2,..., n-го числа, умноженного на β_n неположительна.

DM-ML 13.4. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

DM-ML 13.5. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.