Листок 13. Паросочетания.

В этом домашнем задании вам потребуются два следующих утверждения, которые не успели рассказать вам на теории:

(а) В любом двудольном графе размер максимального паросочетания (множества ребер графа такое, что никакие два ребра не имеют общей вершины) равно размеру минимального вершинного покрытия (множества вершин таких, что любое ребро графа инцидентно одной из этих вершин);

(б) Если в двудольном графе для любого набора из k вершин в левой доли существует хотя бы k соседей из правой доли, то в графе есть паросочетание покрывающее левую долю.

DM-ML 1. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

DM-ML 2. На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами.

(а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону.

(б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

DM-ML 3. (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из m нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

DM-ML 4. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

DM-ML 5. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

DM-ML 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

Подсказка: Надо выбирать значения переменных случайным образом, причем необязательно равновероятно. Для переменных, которые входят в дизъюнкты из одного литерала, надо выбирать с большей вероятностью значение, которое выполнит этот дизъюнкт.

DM-ML 10.7. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$

Подсказка: Рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DM-ML 11.2. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

Подсказка: В первом пункте поймите, что запуск алгоритма много раз помогает. Во втором пункте с помощью вероятностного метода и пункта 1 доказать, что найдется такая строка случайных битов, с которой схема будет верно вычислять функцию f на всех входах.

DM-ML 11.5. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

Подсказка: Рассмотрите случайное множество вершин, в котором каждая вершина выбирается с вероятностью p. После этого из этого множества нужно выкинуть по одной вершине для каждого ребра. Посчитайте математическое ожидание числа оставшихся вершин.

DM-ML 11.6. (Коды Уолша-Адамара.)

(а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1x_2\dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_ix_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

(б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

Подсказка: Z — это строка длины 2^n, будем считать, что Z — это таблица значений некоторой функции $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Покажите, что для каждого x и $g(r) + g(x+r) = f_a(x)$ с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}+2\epsilon$, если r выбирается случайно и равновероятно из множества строк длины $\{0,1\}^n$.

DM-ML 12.1. Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$. (В решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете.)

DM-ML 12.3. Полиэдром называется множество точек $\mathbb{R}^{\ltimes}$, которое задается системой нестрогих линейных неравенств от n переменных.

(а) Докажите, что полиэдр выпуклое множество, т.е. вместе с любыми двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ он содержит отрезок между ними, т.е. множество точек $\{(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \mid \lambda \in [0,1]\}$.

(б) Покажите, что если задача линейного программирования имеет два оптимальных решения, то она имеет бесконечно много оптимальных решений.

DM-ML 12.4. Дан квадрат $n \times n$, в клетках которого стоят вещественные числа. Докажите, что либо можно подобрать такие n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (хотя бы одно из них не нулевое), что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на α_1, второго числа, умноженного на α_2,..., n-го числа, умноженного на α_n неотрицательна, либо можно подобрать такие n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ (хотя бы одно из них не нулевое), что в каждой строке сумма первого числа умноженного на β_1, второго числа, умноженного на β_2,..., n-го числа, умноженного на β_n неположительна.