Листок 12. Линейное программирование.

DM-ML 1. Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$. (В решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете.)

DM-ML 2. Полиэдром называется множество точек $\mathbb{R}^{\ltimes}$, которое задается системой нестрогих линейных неравенств от n переменных.

(а) Докажите, что полиэдр выпуклое множество, т.е. вместе с любыми двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ он содержит отрезок между ними, т.е. множество точек $\{(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2, \ldots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \mid \lambda \in [0,1]\}$.

(б) Покажите, что если задача линейного программирования имеет два оптимальных решения, то она имеет бесконечно много оптимальных решений.

DM-ML 3. Дан квадрат $n \times n$, в клетках которого стоят вещественные числа. Докажите, что либо можно подобрать такие n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на α_1, второго числа, умноженного на α_2,..., n-го числа, умноженного на α_n неотрицательна, либо можно подобрать такие n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на β_1, второго числа, умноженного на β_2,..., n-го числа, умноженного на β_n неположительна.

DM-ML 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

Подсказка: Надо выбирать значения переменных случайным образом, причем необязательно равновероятно. Для переменных, которые входят в дизъюнкты из одного литерала, надо выбирать с большей вероятностью значение, которое выполнит этот дизъюнкт.

DM-ML 10.7. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$

Подсказка: Рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DM-ML 11.2. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1-2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

Подсказка: В первом пункте поймите, что запуск алгоритма много раз помогает. Во втором пункте с помощью вероятностного метода и пункта 1 доказать, что найдется такая строка случайных битов, с которой схема будет верно вычислять функцию f на всех входах.

DM-ML 11.3. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

DM-ML 11.4. Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\mathsf{P}[X=0] \leq \frac{\mathrm{D}[x]}{\mathrm{E}[X]^2}$.

DM-ML 11.5. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

Подсказка: Рассмотрите случайное множество вершин, в котором каждая вершина выбирается с вероятностью p. После этого из этого множества нужно выкинуть по одной вершине для каждого ребра. Посчитайте математическое ожидание числа оставшихся вершин.

DM-ML 11.6. (Коды Уолша-Адамара.)

(а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1x_2\dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_ix_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a,b \in \{0,1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

(б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4}-\epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как миниминум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

Подсказка: Z — это строка длины 2^n, будем считать, что Z — это таблица значений некоторой функции $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Покажите, что для каждого x и $g(r)+g(x+r) = f_a(x)$ с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}+2\epsilon$, если r выбирается случайно и равновероятно из множества строк длины $\{0,1\}^n$.