

Листок 11. Еще чуть-чуть вероятностей.

DM-ML 1. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы

- (а) Покажите, что для любых $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми.
- (б) Покажите, что для любых функций $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ случайные величины $f_i(X_i)$ являются независимыми.
- (в) Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми.
- (г) Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что для любых функций $f : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n] \setminus I} \rightarrow \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i \in I})$ и $g((X_i)_{i \in [n] \setminus I})$ независимы.

DM-ML 2. Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\mathbb{P}[f(x) = C(x, r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r , которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

- (а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n + m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn , что при всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\mathbb{P}[f(x) = C'(x, r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r , которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^{m'}$ с равными вероятностями.
- (б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn , что для всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

DM-ML 3. Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

DM-ML 4. Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\mathbb{P}[X = 0] \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}$.

DM-ML 5. Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

DM-ML 6. (Коды Уолша-Адамара.)

- (а) Каждому $a \in \{0, 1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{2}$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0, 1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n . Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0, 1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

- (б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z , за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0, 1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0, 1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может сделать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

DM-ML 8.8. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

DM-ML 9.8. Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k , то его вершины можно покрасить в $\lceil k/2 \rceil + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($\lceil x \rceil$ обозначает целую часть числа x).

DM-ML 10.2. Каждый из k человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равномерно из оставшихся n этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

DM-ML 10.4. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DM-ML 10.6. Докажите, что элементы множества $[n]$ можно покрасить в два цвета так, чтобы ни одна арифметическая прогрессия длины $\lceil 2 \log n \rceil$ не была покрашена в один цвет.

DM-ML 10.7. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n \frac{1 + \ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.