

Листок 1. Индукция.

DM-ML 1. Докажите равенства

(а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(б) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}$;

(в) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

(г) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

DM-ML 2. Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ для всех натуральных n и вещественных $x \geq -1$.

DM-ML 3. Есть гири весом $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$. Докажите, что любой груз в промежутке от 1 до $2^n - 1$ можно уравновесить единственным образом.

DM-ML 4. (Коды Грея) Докажите, что все бинарные строки длины n (т.е. множество $\{0, 1\}^n$) можно выписать подряд, так что каждая следующая строка отличается от предыдущей ровно в одном символе.

DM-ML 5.

(а) На плоскости нарисовано несколько окружностей, докажите, что области, на которые эти окружности разбивают плоскость можно покрасить в черный и белые цвета в шахматном порядке.

(б) Дано изображение плоского Эйлера графа (степени всех вершин четны, ребра не пересекаются). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

DM-ML 6. В неориентированном графе $2n$ вершин нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2 , причем оценка n^2 достигается.

DM-ML 7. Дана однородная линейная система от n переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$), в которой меньше, чем n уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.

DM-ML 8. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.