Классная работа 4 (решали 03.03).

Во всех задачах t — целое число, не являющееся полным квадратом.

$\boxed{\textbf{ALG 1.}}$ Найдите “простое” условие на число t, равносильное тому, что множество $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{t}}{2}] = \{a + b\frac{1+\sqrt{t}}{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ - подкольцо поля $\mathbb{C}$.

В дальнейшем это кольцо будет рассматриваться только при $t \equiv 1 \pmod 4$

$\boxed{\textbf{ALG 2.}}$ Обозначим через ν функцию, действующую из $\mathbb{C}$ в $[0; +\infty)$ по правилу $z \mapsto |z|^2$. Пусть R - подкольцо поля $\mathbb{C}$ и для любого $r \in R$ выполнено $\nu(r) \in \mathbb{Z}$. Докажите, что R — евклидово кольцо относительно нормы ν, если и только если для любых $r \in R \setminus \{0\}$ и $s \in R$ существует такое $q \in R$, что $|\frac{s}{r} - q| < 1$.

$\boxed{\textbf{ALG 3.}}$ Докажите, что следующие подкольца поля $\mathbb{C}$ удовлетворяют условию “для любого $r \in R$ выполнено $\nu(r) \in \mathbb{Z}$”:

(а) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$;

(б) $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{t}}{2}]$, где $t \equiv 1 \pmod 4$.

$\boxed{\textbf{ALG 4.}}$ Пусть $t \leq -3$. Докажите, что 2 — неприводимый элемент кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$.

$\boxed{\textbf{ALG 5.}}$ Разложите в сумму простейших над полем $\mathbb{C}$ дробь $\frac{x}{(x^2-1)^2}$.