Классная работа 3 (решали 24.02).

$\boxed{\textbf{ALG 1.}}$ Пусть t — не является полным квадратом в $\mathbb{Z}$, тогда введем обозначение $\mathbb{Z}[\sqrt{t}] = \{a + b\sqrt{t} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(а) Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ изоморфно $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - t)$;

(б) докажите, что функция $\nu \colon \mathbb{Z}[\sqrt{t}] \to \mathbb{Z}$ такая, что $\nu(a + b\sqrt{t}) = |a^2 - b^2 t|$ мультипликационная;

(в) докажите, что $r \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ — обратим тогда и только тогда, когда $\nu(r) = 1$.

$\boxed{\textbf{ALG 2.}}$ Пусть $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ многочлен из $\mathbb{Z}[x]$, тогда c_g наибольший общий делитель $a_0, \ldots, a_n$. Докажите, что для любых $g, f \in \mathbb{Z}[x]$, тогда $c_{fg} = c_f c_g$.

$\boxed{\textbf{ALG 3.}}$ Докажите, что $\mathbb{Z}[x]$ — не кольцо главных идеалов.