Домашняя работа 2 (на 24.02).

$\boxed{\textbf{ALG 1.}}$ Решить сравнение: $3x + 7 \equiv 0 \pmod{17}$.

$\boxed{\textbf{ALG 2.}}$ Разложите $x^3 + 5x^2 + 9x + 6$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}[x]$.

$\boxed{\textbf{ALG 3.}}$ Является ли идеалом

(а) множество $\{1 + f(x) | f \in \mathbb{Z}[x]\}$ идеалом кольца многочленов над целыми числами;

(б) множество $\{xf(x) | f \in \mathbb{Z}[x]\}$ идеалом кольца многочленов над целыми числами.

$\boxed{\textbf{ALG 4.}}$ Пусть R некоторое кольцо, тогда будем называть отображения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$ в R формальными степенными рядами над R (обозначим множество формальных степенных рядов над R, как $R[[x]]$). Введем на них операции умножения и сложения следующим образом: если $f, g \in R[[x]]$, то $(f+g)(i) = f(i)+g(i)$ и $(f \cdot g)(i) = \sum\limits_{j=0}^{i} f(j) \cdot g(i-j)$ (степенные ряды похожи на многочлены, но у них бесконечно "мономов").

(а) Докажите, что формальные степенные ряды образуют кольцо;

(б) найдите все обратимые элементы в кольце формальных степенных рядов над $\mathbb{R}$;

(в) докажите, что $\mathbb{R}[[x]]$ — кольцо главных идеалов.